ВНИИ СИСТЕМНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

сборник трудов

9

1978

пределу можно опустить. Для производственной функции типа Кобба — Дугласа

$$U[\varkappa(t), \varphi(t), t] = f(t)\varkappa^{\alpha}(t)\varphi^{\beta}(t), \quad \alpha+\beta=1$$

(здесь экзогенно заданная функция $f(t)$ моделирует технический прогресс, воплощенный в фондах периода t) уравнение дифференциальной оптимизации имеет следующий вид:

$$\beta f(t)\varkappa^{\alpha}(t)\varphi^{-\alpha}(t) = f(m(t))\varkappa^{\alpha}(m(t))\varphi^{-\alpha}(m(t)).$$

В варианте с эндогенно заданной функцией $\varkappa$ $(\varkappa(t) = \gamma P(t))$ принцип дифференциальной оптимизации приводит также к уравнению (5). Действительно, в рассматриваемом случае величина $P_{\gamma}^{'+}$ на траектории $\gamma(t) = \{\varkappa(t), \varphi(t), m(t)\}$ будет задаваться формулой

$$P_{\gamma}^{'+} = U[\varkappa^{+}(t), \varphi^{+}(t), t] - U[\varkappa(m(t)), \varphi(m(t)), m(t)]\,m'^{+}(t).$$

Функция $\varkappa$ непрерывно зависит от времени, как это видно из уравнения (4). Следовательно, число $\varkappa^{+}(t_0) = \varkappa(t_0)$ одинаково для всех траекторий, совпадающих при $t < t_0$, и не может варьироваться. Мы приходим к той же экстремальной задаче и к прежнему уравнению дифференциальной оптимизации.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Канторович Л. В., Вайнштейн А. Л.* Об исчислении нормы эффективности на основе однопродуктовой модели развития хозяйства. Экономика и математические методы. 1967, т. III, вып. 5.
2. *Solow R.* Investment and technical progress. In: Mathematical Methods in the Social Sciences, Standford, 1960.
3. *Johansen L.* Substitution versus Fixed Production Coefficents in the theory of Economic Growth. Econometrica, 1959, v. 27.
4. *Канторович Л. В., Горьков, Л. И.* Функциональные уравнения однопродуктовой модели. ДАН СССР, 1959, т. 129, № 4.
5. *Браун М.* Теория и измерение технического прогресса. М., Статистика, 1971.
6. *Канторович Л. В., Жиянов В. И.* Однопродуктовая динамическая модель экономики, учитывающая изменение структуры фондов при наличии технического прогресса. ДАН СССР, 1973, т. 211, № 6.
7. *Жиянов В. И., Хованский А. Г.* Экспоненциальное развитие экономики в динамической модели с учетом научно-технического прогресса. Настоящий сборник, с. 25

В. И. Жиянов, А. Г. Хованский

ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЕ РАЗВИТИЕ ЭКОНОМИКИ В ДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ С УЧЕТОМ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОГО ПРОГРЕССА

В настоящей статье продолжается изучение однопродуктовой модели экономики с фондами, дифференцированными по моментам их создания [2]—[4]. Рассматриваются некоторые интересные с экономической точки зрения случаи, в которых система уравнений модели поддается явному решению. Один из таких случаев — вариант модели с экзогенно заданными капиталовложениями, в котором предполагается постоянство трудовых ресурсов. При этом предположении система уравнений распадается, удается найти явные формулы для решений и исследовать их асимптотическое поведение. Более реалистическим является предположение об экспоненциальном росте трудовых ресурсов. В этом варианте уравнения модели не поддаются такому же полному исследованию, однако характерные экспоненциальные решения удается найти и здесь.

Экспоненциальные решения можно найти и для варианта модели, в котором капиталовложения составляют постоянную часть национального дохода. Найденные здесь решения достаточно естественны — они вполне аналогичны известным решениям в однопродуктовых моделях с агрегированными фондами [1].

В заключительных пунктах статьи обсуждается следующий вопрос: какое влияние оказывают дополнительные капиталовложения и увеличение темпов технического прогресса на развитие экономической системы (в рамках изучаемой модели)? Для ответа на этот вопрос уравнения модели линеаризуются около известных решений и изучается поведение решения линеаризованных уравнений. Здесь мы приходим к такому выводу: в условиях дифференциально оптимального развития экономической системы значительная доля дополнительных капиталовложений идет на увеличение объема вновь вводимых фондов. При этом с большей интенсивностью закрываются устаревшие фонды, и высвобождающиеся трудовые ресурсы направляются на вновь вводимые фонды. Производительность труда на вновь вводимых фондах в первом приближении остается прежней (не зависит от дополнительных капиталовложений и от увеличения темпов научно-технического прогресса).

В данной статье не приводится описания модели — его можно найти в работе [4] настоящего сборника. Все обозначения из работы [4] используются без предварительных пояснений.

1. Вариант экзогенных капиталовложений и постоянных трудовых ресурсов

В данном пункте будет получено явное решение системы уравнений модели при следующих предположениях:

1) производственная функция $U(\varkappa, \varphi, t)$ является функцией Кобба-Дугласа, т. е. $U(\varkappa, \varphi, t) = f(t)\varkappa^{\alpha}(t)\varphi^{\beta}(t)$, $\alpha+\beta=1$;

2) трудовые ресурсы не меняются со временем, $T(t)=T_0$;

3) функция $\varkappa(t)$ задана на полуоси $[t_0, \infty\rangle$ (она предполагается положительной и непрерывной).

Нам будет удобно пользоваться функцией $\Pi(t)$, равной производительности труда на фондах, созданных в момент времени t. Для $\Pi(t)$, очевидно, справедлива формула $\Pi(t) = \dfrac{U(\varkappa(t), \varphi(t), t)}{\varphi(t)}$.

При сделанных предположениях эта формула принимает вид $\Pi(t) = f(t)\varkappa^{\alpha}(t)\varphi^{-\alpha}(t)$. Система уравнений модели

$$\varphi(t) = \varphi(m(t))\, m'(t) + T'(t) \tag{1}$$

$$\frac{\partial U[\varkappa(t), \varphi(t), t]}{\partial \varphi} = \frac{U[\varkappa(m(t)), \varphi(m(t)), m(t)]}{\varphi(m(t))} \tag{2}$$

принимает в нашем случае такой вид:

$$\varphi(t) = \varphi(m(t))\, m'(t) \tag{3}$$

$$\Pi(m(t)) = \beta\Pi(t). \tag{4}$$

Вот более подробная запись уравнения (4):

$$f(m(t))\,\varkappa^{\alpha}(m(t))\,\varphi^{-\alpha}(m(t))=\beta f(t)\,\varkappa^{\alpha}(t)\,\varphi^{-\alpha}(t). \tag{5}$$

Начальными данными в рассматриваемом варианте модели служат начальный отрезок $[m(t_0),\ t_0]$ и функция $\varphi(t)$, заданная на этом начальном отрезке.

Утверждение. Пусть начальные данные таковы, что функция $\Pi(t)$ монотонно возрастает и непрерывна на начальном отрезке $[m(t_0),\ t_0]$. Пусть для начальных данных выполнено условие согласования $\Pi(m(t_0))=\beta\Pi(t_0)$. Тогда для таких начальных данных существует единственное решение системы уравнений (3), (4). Это решение определено на луче $[t_0,\ \infty>$. Для этого решения функция $\Pi(t)$ монотонно возрастает и функция $\varphi(t)$ положительная. Функция $m(t)$ монотонно возрастает и при любом t остается меньшей t, $m(t)<t$. Функция $m(t)$ может быть найдена из уравнения

$$\int\limits_{m(t_0)}^{m(t)} f^{\frac{1}{\alpha}}(\tau)\,\varkappa(\tau)\,d\tau=\beta^{\frac{1}{\alpha}}\int\limits_{t_0}^{t} f^{\frac{1}{\alpha}}(\tau)\,\varkappa(\tau)\,d\tau$$

Доказательство. Допустим, что функции $\varphi(t)$, $m(t)$ удовлетворяют системе (3), (4) и начальным данным. Возведем обе части уравнения (5) в степень $\frac{1}{\alpha}$. Получим

$$f^{\frac{1}{\alpha}}(m(t))\,\varkappa(m(t))\,\varphi^{-1}(m(t))=\beta^{\frac{1}{\alpha}}f^{\frac{1}{\alpha}}(t)\,\varkappa(t)\,\varphi^{-1}(t).$$

Умножив это уравнение на уравнение (3), получим дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными для определения $m(t)$.

$$f^{\frac{1}{\alpha}}(m(t))\,\varkappa(m(t))\,m'(t)=\beta^{\frac{1}{\alpha}}f^{\frac{1}{\alpha}}(t)\,\varkappa(t). \tag{6}$$

Запишем его в виде $f^{\frac{1}{\alpha}}(m)\,\varkappa(m)\,dm=\beta^{\frac{1}{\alpha}}f^{\frac{1}{\alpha}}(t)\,\varkappa(t)\,dt$. Проинтегрировав это уравнение, получим

$$\int\limits_{m(t_0)}^{m(t)} f^{\frac{1}{\alpha}}(\tau)\,\varkappa(\tau)\,d(\tau)=\beta^{\frac{1}{\alpha}}\int\limits_{t_0}^{t} f^{\frac{1}{\alpha}}(\tau)\,\varkappa(\tau)\,d\tau. \tag{7}$$

Несложно доказать, что уравнение (7) имеет монотонно возрастающее решение $m(t)$, определенное на полуоси $[t_0,\ \infty\rangle$. Из положительности функции $f^{\frac{1}{\alpha}}(\tau)\,\varkappa(\tau)$ и из неравенства $0<\beta<1$ автоматически вытекает неравенство $m(t)<t$.

Пусть $m(t)$ решение уравнения (7). Для нахождения функций $\varphi(t)$ и $\Pi(t)$ остаются уравнения (3) и (4). Покажем, что эти уравнения дают возможность однозначно определить функции $\varphi(t)$ и $\Pi(t)$. Рассмотрим временной отрезок $[t_0,\ T]$ (T — произвольное число большее t_0). Как показано выше, функция $(t-m(t))$ положительна, поэтому на отрезке $[t_0,\ T]$ она превосходит некоторую положительную константу ε. Критические точки $t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_k,\ \ldots$ определяются рекуррентно равенствами $m(t_1)=t_0,\ \ldots,\ m(t_k)=t_{k-1},\ \ldots$. Так как функция $(t-m(t))>$ $>\varepsilon$, то критические точки $t_1,\ t_2,\ \ldots$ не накапливаются на отрезке $[t_0, T]$ и, значит, при некотором N будет иметь место неравенство $t_{N+1}>$ $>T$. Обозначим через I_k отрезок $t_{k-1}\leqslant t\leqslant t_k$ и через I_0 начальный отрезок $m(t_0)\leqslant t\leqslant t_0$. Видно, что если $t\in I_k$, то $m(t)\in I_{k-1}$ и если $t\in I_1$, то $m(t)\in I_0$. Поэтому уравнения (3) и (4) дают возможность рекуррентно определить функции $\varphi(t)$ и $\Pi(t)$ сначала на отрезке I_1, затем на отрезке I_2 и т. д. Так как на начальном отрезке по условию функция $\varphi(t)$ положительна, и функция $\Pi(t)$ монотонно возрастает, то рекуррентно определенные функции $\varphi(t)$ и $\Pi(t)$ обладают, очевидно, теми же свойствами. Утверждение доказано.

Отметим, что в рассматриваемом варианте естественные предпосылки моделирования (монотонный рост производительности труда на фондах периода t, неравенство $\varphi(t)>0$, монотонный рост функции $m(t)$ и неравенство $m(t)<t$) автоматически выполняются для решения, если они выполнены на начальном интервале. Далее, бросается в глаза устойчивость функции $m(t)$ относительно изменения начальных данных. В частности, функция $m(t)$ в рассматриваемом варианте вообще не зависит от распределения трудовых ресурсов по фондам различных моментов создания на начальном интервале (от функции $\varphi(t)$ при $m(t_0)\leqslant t\leqslant t_0$). При быстро растущей функции $f^{\frac{1}{\alpha}}(t)\varkappa(t)$ функция $m(t)$ быстро выходит на режим, не зависящий от длительности начального периода. В самом деле, уравнение для $m(t)$ (при больших t) можно записать в виде

$$\int\limits_{m(t_0)}^{t_0} f^{\frac{1}{\alpha}}(\tau)\varkappa(\tau)\,d(\tau)+\int\limits_{t_0}^{m(t)} f^{\frac{1}{\alpha}}(\tau)\varkappa(\tau)\,d\tau=\beta^{\frac{1}{\alpha}}\int\limits_{t_0}^{t} f^{\frac{1}{\alpha}}(\tau)\varkappa(\tau)\,d\tau.$$

От начального данного $m(t_0)$, который задает длительность «отрезка влияния» $[m(t_0), t_0]$, зависит только первый член $\int\limits_{m(t_0)}^{t_0} f^{\frac{1}{\alpha}}(\tau)\varkappa(\tau)\,d\tau$, который при больших t мал по сравнению с остальными.

Отметим, что устойчивость функции $m(t)$ относительно смены начальных данных сначала была обнаружена в численных экспериментах (приближенное решение системы уравнений модели на ЭВМ для различных вариантов). Эти эксперименты указывают на высокую устойчивость функции $m(t)$ и в других вариантах модели (в случае экспоненциального роста трудовых ресурсов и в случае эндогенного характера функции $\varkappa(t)$).

Остановимся теперь на асимптотическом поведении решений модели при $t\to\infty$. Как уже отмечалось, асимптотическое поведение функции $m(t)$ зависит прежде всего от поведения функции $f^{\frac{1}{\alpha}}(t)\varkappa(t)$ при $t\to\infty$. Можно показать, что если функция $f^{\frac{1}{\alpha}}(t)\varkappa(t)$ имеет степенной рост, то функция $m(t)$ будет приближаться к линейной: $m(t)\approx at+b,\quad a<1$. Более интересен случай функции $f^{\frac{1}{\alpha}}(t)\varkappa(t)$ экспоненциального вида, т. е. когда $f^{\frac{1}{\alpha}}(t)\varkappa(t)=Ce^{\rho t}$. Остановимся на нем подробнее. В этом случае уравнение (7) принимает вид

$$\int\limits_{m(t_0)}^{m(t)} Ce^{\rho\tau}d\tau=\beta^{\frac{1}{\alpha}}\int\limits_{t_0}^{t} Ce^{\rho\tau}d\tau$$

или

$$e^{\rho m(t)}-e^{\rho m(t_0)}=\beta^{\frac{1}{\alpha}}(e^{\rho t}-e^{\rho t_0}), \tag{8}$$

откуда

$$m(t)=\frac{-1}{\alpha\rho}\ln\beta+\frac{1}{\rho}\ln\left[e^{\rho t}+\beta^{-\frac{1}{\alpha}}e^{\rho m(t_0)}-e^{\rho t_0}\right].$$

Положим $A=\frac{-1}{\alpha\rho}\ln\beta$ (число A положительно, так как $\ln\beta<0$) и $B=\beta^{-\frac{1}{\alpha}}e^{\rho m(t_0)}-e^{\rho t_0}$. Тогда $m(t)=\frac{1}{\rho}\ln[e^{\rho t}+B]-A$. Особенно простой вид функция $m(t)$ будет иметь, если $B=\beta^{-\frac{1}{\alpha}}e^{\rho m(t_0)}-e^{\rho t_0}$ равно нулю. В этом случае $m(t)=t-A$. Для функции $\varphi(t)$ получаем уравнение $\varphi(t)=\varphi(t-A)$, которое просто показывает, что функция $\varphi(t)$ продолжается с начального отрезка I_0 как периодическая функция. Покажем, что и при $B\neq 0$ система имеет аналогичное поведение при $t\to\infty$. Перепишем формулу для $m(t)$ в виде $m(t)=t-A+\frac{1}{\rho}\ln[1+Be^{-\rho t}]$. С ростом t слагаемое $Be^{-\rho t}$ становится малым и функция $m(t)$ быстро выходит на стационарный режим.

$$m(t)\approx t-A,\quad \boxed{A=-\frac{1}{\alpha\rho}\ln\beta.}$$

(Если $x(t)=x_0\cdot e^{\gamma t}$, $\beta(t)=e^{\delta t}$, то $\frac{1}{\alpha\rho}=\frac{\beta}{\delta}$, т.к. $e^{\delta}\cdot e^{\delta/\beta}=e^{\rho}\Rightarrow\rho=\frac{\delta}{\alpha\beta}$)

Понаблюдаем теперь за поведением функции $\varphi(t)$. При больших t уравнение $\varphi(t)=\varphi(m(t))\,m'(t)$ все точнее и точнее совпадает с уравнением $\varphi(t)=\varphi(t-A)$, поэтому естественно ожидать, что функция $\varphi(t)$ с течением времени выходит на периодический режим периода A.

Проведем выкладку, доказывающую это утверждение и позволяющую вычислить предельную периодическую функцию через первоначально заданную функцию $\varphi(t)$ при $m(t_0)\leqslant t\leqslant t_0$. Функция $m(t)$ отображает отрезок I_k в I_{k-1}, в частности, I_1 в I_0. Обратная функция $t(m)$ будет осуществлять обратное отображение, а ее k-я итерация $\underbrace{t(t(\ldots(t(m))\ldots))}_{k\text{ раз}}=t_k(m)$ будет, в частности, осуществлять интересующее нас отображение начального отрезка I_0 в k-й отрезок I_k.

Из равенства (8), рассматривая t как функцаю m, получаем

$$e^{\rho t(m)}=qe^{\rho m}+p,$$

где $q=\beta^{-\frac{1}{\alpha}}$ и

$$p=q\,(e^{\rho t_0}-e^{\rho m(t_0)}).$$

Подставляя в это равенство вместо m, функцию $t(m)$, получим

$$e^{\rho t_2(m)}=e^{\rho t(t(m))}=qe^{\rho t(m)}+p=q^2e^{\rho m}+qp+p.$$

Проведя такую подстановку k раз, получим

$$e^{\rho t_{(k)}(m)}=q^ke^{\rho m}+(q^{k-1}+q^{k-2}+\ldots+1)\,p=q^k\left(e^{\rho m}+\frac{1-\left(\frac{1}{q}\right)^k}{1-q}\,p\right).$$

Отсюда мы имеем явную формулу для k-й итерации функции $t(m)$:

$$t_k(m)=kA+\frac{1}{\rho}\ln\left[e^{\rho m}+\frac{1-\left(\frac{1}{q}\right)^k}{1-q}\,p\right].$$

При больших k получим асимптотическую формулу для $t_k(m)$

$$t_{(k)}(m)=kA+\frac{1}{\rho}\ln\left[e^{\rho m}+\frac{p}{1-q}\right].$$

Далее, обращая равенства $\varphi(t)=\varphi(m(t))\,m'(t)$ и $\beta\Pi(t)=\Pi(m(t))$ и делая k итераций, приходим к равенствам:

$$\varphi(t_{(k)}(m))\,t'_{(k)}(m)=\varphi(m)$$

$$\beta^k\Pi(t_{(k)}(m))=\Pi(m).$$

Эти формулы вместе с явной и асимптотической формулой для $t_{(k)}(m)$ дают возможность получить явные и асимптотические формулы для $\varphi(t_{(k)}(m))$ и $\Pi(t_{(k)}(m))$. Из асимптотической формулы несложно видеть, что функция $\varphi(t)$ при больших t действительно выходит на периодический режим, который можно указать явно.

2. Экспоненциальные решения при экзогенных капиталовложениях

В предыдущем пункте трудовые ресурсы предполагались постоянными. Более реалистическим является предположение об экспоненциальном росте трудовых ресурсов. В этом варианте уравнения модели не поддаются такому же полному исследованию, однако характерные экспоненциальные решения можно найти и здесь.

Предположения:

1) $U(\varkappa(t),\ \varphi(t),\ t)=f(t)\varkappa^{\alpha}(t)\varphi^{\beta}(t),\ \alpha+\beta=1$

2) функция $T(t)$ имеет экспоненциальный вид, т. е. $T(t)=T_0e^{pt}$ (здесь T_0 и p — заданные константы);

3) капиталовложения $\varkappa(t)$ заданы таким образом, что функция $f^{\frac{1}{\alpha}}(t)\varkappa(t)$ имеет экспоненциальный вид, т. е. $f^{\frac{1}{\alpha}}(t)\varkappa(t)=Ce^{\rho t}$ (здесь C и ρ — заданные константы).

Мы ищем решение $\varphi(t)$, $m(t)$, для которого функция $\varphi(t)$ имеет экспоненциальный вид, т. е. $\varphi(t)=\varphi_0e^{lt}$ (здесь φ_0 и l — неизвестные константы). Подставляя выражения для функций $\varphi(t)$, $T(t)$, $f^{\frac{1}{\alpha}}(t)\varkappa(t)$ в уравнения (1) и (5) модели получим

$$\varphi_0e^{lt}=pT_0e^{pt}+\varphi_0e^{lm(t)}m'(t) \tag{9}$$

$$C^{\alpha}e^{\alpha\rho m(t)}\varphi_0^{-\alpha}e^{-\alpha lm(t)}=\beta C^{\alpha}e^{\alpha\rho t}\varphi_0^{\alpha}e^{\alpha lt} \tag{10}$$

Логарифмируя уравнение (10), получим

$$m(t)\,\alpha(\rho-l)=\ln\beta+\alpha(\rho-l)\,t.$$

Откуда $m(t)=t+\frac{\ln\beta}{\alpha(\rho-l)}$. Обозначим величину $-\frac{\ln\beta}{\alpha(\rho-l)}$ через A ($A>0$, так как $0<\beta<1$). В этих обозначениях $m(t)=t-A$. Подставляя выражение $m(t)$ в уравнение (9), получим

$$\varphi_0e^{lt}(1-e^{-lA})=pT_0e^{pt}.$$

Откуда можно заключить, что $l=p$ и, следовательно, $A=\frac{-\ln\beta}{\alpha(\rho-p)}$. Далее $\varphi_0(1-e^{-pA})=pT_0$, откуда $\varphi_0=\frac{pT_0}{1-e^{-pA}}$. Подведем итог. Решение с искомыми свойствами существует, оно единственно и имеет вид $\varphi(t)=\varphi_0e^{pt}$, $m(t)=t-A$, где $A=\frac{-\ln\beta}{\alpha(\rho-p)}$ и $\varphi_0=\frac{pT_0}{1-e^{-pA}}$.

3. Экспоненциальные решения (при капиталовложениях, составляющих постоянную часть национального дохода).

В этом варианте модели функция $\varkappa(t)$ не предполагается экзогенной и к уравнениям модели (1) и (2) добавляется еще одно уравнение

$$\varkappa(t)=\gamma\int_{m(t)}^{t} U(\varkappa(\tau),\ \varphi(\tau),\ \tau)\,d\tau. \tag{11}$$

Мы будем искать экспоненциальные решения при следующих предположениях:

1) $U(\varkappa,\ \varphi,\ \tau)=f(t)\,\varkappa^{\alpha}(t)\,\varphi^{\beta}(t)$. В этом пункте будем предполагать, что множитель $f(t)$ (отражающий научно-технический прогресс, воплощенный в фондах периода t) имеет вид $f(t)=e^{\delta t}$, где δ фиксированная константа.

2) $T(t)=T_0e^{pt}$ (здесь T_0 и p — заданные константы). Мы ищем решение $\varkappa(t)$, $\varphi(t)$, $m(t)$, для которого функции $\varphi(t)$ и $\varkappa(t)$ имеют экспоненциональный вид, т. е. $\varphi(t)=\varphi_0e^{lt}$ и $\varkappa(t)=\varkappa_0e^{\mu t}$ (здесь $\varphi_0 l$, $\varkappa_0$ и μ — неизвестные константы).

Допустим, что искомое решение существует. Тогда для него функция $f^{\frac{1}{\alpha}}(t)\,\varkappa(t)$ будет иметь экспоненциональный вид $f^{\frac{1}{\alpha}}(t)\,\varkappa(t)=\varkappa_0e^{\left(\mu+\frac{\delta}{\alpha}\right)t}$. Поэтому мы вправе применить вычисления предыдущего пункта

$$m(t)=t-A,\quad \varphi(t)=\varphi_0e^{pt},$$

где

$$\varphi_0=\frac{pT_0}{1-e^{-pA}}\ \text{ и }\ A=\frac{-\ln\beta}{(\alpha\mu+\delta-\alpha p)}.$$

Уравнение (11) при наших допущениях имеет вид

$$\varkappa(t)=\gamma\int_{m(t)}^{t} e^{\delta\tau}(\tau)\,\varkappa^{\alpha}(\tau)\,\varphi^{\beta}(\tau)\,d\tau.$$

Подставляя в него выражения для $\varkappa$, φ и m, получим

$$\varkappa_0e^{\mu t}=\gamma\varphi_0^{\beta}\varkappa_0^{\alpha}\int_{t-A}^{t} e^{(\delta+\alpha\mu+\beta p)\tau}d\tau=$$

$$=\frac{\gamma\varphi_0^{\beta}\varkappa_0^{\alpha}}{\delta+\alpha\mu+\beta p}\,e^{(\delta+\alpha\mu+\beta p)t}\left(1-e^{-(\delta+\alpha\mu+\beta p)A}\right).$$

Отсюда можно заключить, что

$$\varkappa_0=\frac{\gamma\varphi_0^{\beta}\varkappa_0^{\alpha}}{\delta+\alpha\mu+\beta p}\left(1-e^{-(\delta+\alpha\mu+\beta p)A}\right.$$

$$\mu=\delta+\alpha\mu+\beta p \tag{12}$$

Из соотношения (12) $\mu=p+\frac{\delta}{\beta}$ и, следовательно,

$$A=\frac{-\beta\ln\beta}{\delta}.$$

Сопоставляя оставшиеся уравнения, несложно найти оставшиеся константы. Приведем ответ. Решение с искомыми свойствами существует, оно единственно и имеет следующий вид:

$$m(t)=t-\frac{-\beta\ln\beta}{\delta}$$

$$\varphi(t)=pT_0\frac{1}{\left(1-\beta^{\frac{p\beta}{\delta}}\right)}e^{pt}$$

$$\varkappa(t)=\gamma^{\frac{1}{\beta}}pT_0\frac{1}{\left(1-\beta^{\frac{p\beta}{\delta}}\right)}\left[\frac{1-\beta^{1+\frac{p\beta}{\delta}}}{p+\frac{\delta}{\beta}}\right]e^{\left(p+\frac{\delta}{\beta}\right)t}.$$

4. Линеаризация уравнений модели

В этом пункте мы имеем в виду вариант модели, в котором функция $\varkappa(t)$ задана экзогенно. Уравнения модели в этом случае имеют вид

$$T(t)=\int\limits_{m(t)}^{t}\varphi(\tau)\,d\tau \tag{13}$$

$$\beta\Pi(t)=\Pi(m(t)), \tag{14}$$

где $\Pi(t)=f(t)\varkappa^{\alpha}(t)\varphi^{-\alpha}(t)$. Пусть функции $\varphi(t)$ и $m(t)$ являются решениями системы уравнений модели (13)—(14) для фиксированных функций $\varkappa(t)$ и $f(t)$. Нас интересует, что произойдет с этими решениями, если функции $\varkappa(t)$ и $f(t)$ немного изменить. Точнее, пусть, начиная с момента t_0, функция $f(t)$ заменится функцией $f(t)+\delta f(t)$, $\delta f(t)=0$ при $t<t_0$ (введение в эксплуатацию технических новшеств). Пусть начиная с момента t_0, функция $\varkappa(t)$ заменяется функцией $\varkappa(t)+\delta\varkappa((t)$, $\delta\varkappa(t)=0$ при $t<t_0$ (введение дополнительных капиталовложений в промышленность). Предполагается, что добавки относительно малы, т. е. что $\frac{\delta f(t)}{f(t)}\ll 1$ и $\frac{\delta\varkappa(t)}{\varkappa(t)}\ll 1$. Нас интересует, какие добавки $\delta\varphi(t)$ и $\delta m(t)$ получат при этом функции $\varphi(t)$ и $m(t)$ (в первом приближении). Для нахождения малых добавок $\delta\varphi(t)$ и $\delta m(t)$ линеаризуем уравнения (13) и (14) около решения $\varphi(t)$, $m(t)$.

Линеаризация уравнения (13). Возмущенное уравнение (13) имеет вид

$$\int\limits_{m+\delta m}^{t}[\varphi(\tau)+\delta\varphi(\tau)]\,\delta\tau=T(t)$$

или

$$\int\limits_{m}^{t}\varphi(\tau)\,d\tau-\int\limits_{m}^{m+\delta m}\varphi(\tau)\,d\tau+\int\limits_{m}^{t}\delta\varphi(\tau)\,d\tau-\int\limits_{m}^{m+\delta m}\delta\varphi(\tau)\,d\tau=T(t). \tag{15}$$

Так как функции $m(t)$, $\varphi(t)$ удовлетворяют системе (13)—(14), то $\int\limits_{m}^{t}\varphi(\tau)\,d\tau=T(t)$. Выделим главные члены:

$$\int\limits_{m}^{m+\delta m}\varphi(\tau)\,d\tau=\varphi(m)\,\delta m+(\text{член второго порядка малости}),$$

$$\int\limits_{m}^{m+\delta m}\delta\varphi(\tau)\,d\tau=(\text{член второго порядка малости}).$$

Линеаризированное уравнение (13) получается из уравнения (15) отбрасыванием членов второго порядка малости. Оно имеет вид

$$\int\limits_{m}^{t} \delta\varphi(\tau)\,d\tau = \varphi(m(t))\,\delta m(t).$$

Вспоминая, что $\delta\varphi(t)=0$ при $t<t_0$, и ограничиваясь отрезком $t_0 \leqslant t \leqslant t_0+A$, для которого $m(t)<t_0$, получим

$$\int\limits_{t_0}^{t} \delta\varphi(\tau)\,d\tau = \varphi(m(t))\,\delta m(t). \tag{16}$$

Нам будет удобно ввести новую неизвестную функцию $j(t)$, равную $\int\limits_{t_0}^{t}\delta\varphi(\tau)\,d\tau$. Обе неизвестные функции $\delta\varphi$ и δm просто выражают через $j(t)$: $\delta\varphi = j'(t)$ и $\delta m = j'(t):\varphi(m)$.

Линериазуем теперь уравнение (14). Возмущенное уравнение (14) имеет вид

$$\Pi(m+\delta m) = \beta(f+\delta f)\cdot(\varkappa+\delta\varkappa)^{\alpha}(\varphi+\delta\varphi)^{-\alpha}.$$

Воспользовавшись формулой Тейлора, получим

$$\Pi(m)+\Pi'(m)\,\delta m + (\text{члены второго порядка малости}) = \beta(\Pi(t) +$$
$$+\delta f\cdot\varkappa^{\alpha}\varphi^{-\alpha} + f\cdot\alpha\cdot\varkappa^{-\alpha-1}\varphi^{-\alpha}\delta\varkappa - \alpha f\varkappa^{\alpha}\varphi^{-\alpha-1}\delta\varphi + (\text{члены второго}$$
$$\text{порядка малости}).$$

Отбрасывая члены второго порядка малости и воспользовавшись равенством $\Pi(m(t))=\beta\Pi(t)$, получим линеаризацию уравнения (14)

$$\Pi'(m)\,\delta m = \beta\Pi(t)\left(\frac{\delta f}{f}+\alpha\frac{\delta\varkappa}{\varkappa}-\frac{\alpha\delta\varphi}{\varphi}\right) \tag{17}$$

Преобразуем это уравнение:

$$\frac{1}{\alpha\beta}\cdot\frac{\Pi'(m)}{\Pi(t)}\cdot\frac{\varphi(t)}{\varphi(m)}\cdot\varphi(m)\,\delta m = \varphi(t)\left(\frac{\delta f}{\alpha f}+\frac{\delta\varkappa}{\varkappa}\right)-\delta\varphi.$$

Учитывая, что $\varphi(m)\,\delta m = j$ и $\delta\varphi = j'$, получим уравнение для нахождения функции j

$$j'+\frac{1}{\alpha\beta}\,\frac{\Pi'(m)}{\Pi(t)}\,\frac{\varphi(t)}{\varphi(m)}\cdot j = \varphi(t)\left(\frac{\delta f}{\alpha f}+\frac{\delta\varkappa}{\varkappa}\right). \tag{18}$$

Подведем итоги наших вычислений: пусть функции $\varphi(t)$, $m(t)$ удовлетворяют уравнениям (13), (14) при фиксированных функциях $f(t)$, $\varkappa(t)$ и $\Pi(t) = f(t)\,\varkappa^{\alpha}(t)\,\varphi^{-\alpha}(t)$. Пусть функции $f(t)$ и $\varkappa(t)$ получают малые добавки $\delta f(t)$ и $\delta\varkappa(t)$, причем $\frac{\delta f}{f}\ll 1$, $\frac{\delta\varkappa}{\varkappa}\ll 1$ и $\delta f(t)=\delta\varkappa(t)=0$ при $t<t_0$. Тогда для нахождения малых возмущений $\varphi(t)$ и $\delta m(t)$ нужно поступить следующим образом:

а) решить уравнение первого порядка относительно функции $j(t)$

$$j'+\frac{1}{\alpha\beta}\,\frac{\Pi'(m)}{\Pi(t)}\,\frac{\varphi(t)}{\varphi(m)}\,j = \varphi(t)\left(\frac{1}{\alpha}\,\frac{\delta f}{f}+\frac{\delta\varkappa}{\varkappa}\right)$$

с начальными данными $j(t_0)=0$.

б) вычислить $\delta\varphi$ и δm по формулам $\delta\varphi = j'$, $\delta m = j:\varphi(m)$.

3—8583

5. Линеаризация околоэкспоненциальных решений

Продолжим вычисления предыдущего пункта для линеаризации околоэкспоненциальных решений. Для таких решений функции $\Pi(t)$ и $\varphi(t)$ являются экспонентами: $\Pi(t)=Ce^{\omega t}$ и $\varphi(t)=\varphi_0 e^{pt}$. Функция $m(t)$ для таких решений имеет вид $m(t)=t-A$. Уравнение дифференциальной оптимизации $\Pi(t)=\beta\Pi(t+A)$ в этом случае сводится к равенству $e^{\omega A}=\frac{1}{\beta}$ или $\omega=\frac{-\ln\beta}{A}$. Далее $\frac{\Pi'(m)}{\Pi(t)}=\frac{\omega\Pi(m)}{\Pi(t)}=\frac{\omega\beta\Pi(t)}{\Pi(t)}=\frac{-\beta\ln\beta}{A}$, $\frac{\varphi(t)}{\varphi(m)}=e^{pA}$. Поэтому $\frac{1}{\alpha\beta}\cdot\frac{\Pi'(m)}{\Pi(t)}\cdot\frac{\varphi(t)}{\varphi(m)}$ для экспоненциальных решений будет постоянно и равно $\frac{1}{\alpha\beta}\cdot\frac{-\beta\ln\beta}{A}e^{Ap}$. Обозначим эту величину через q, $q=\frac{-\ln\beta}{\alpha}\cdot\frac{1}{A}e^{Ap}$.

Итак, для экспоненциальных решений уравнение линеаризации принимает вид

$$j'+qj=\varphi(t)\left(\frac{1}{\alpha}\frac{\delta f(t)}{f(t)}+\frac{\delta\varkappa(t)}{\varkappa(t)}\right). \tag{19}$$

Обозначим функцию $\varphi(t)\left(\frac{1}{\alpha}\frac{\delta f(t)}{f(t)}+\frac{\delta\varkappa(t)}{\varkappa(t)}\right)$ через $F(t)$. Уравнение (19) решается в явном виде:

$$j(t)=e^{-qt}\int_{t_0}^{t}e^{q\tau}F(\tau)\,d\tau=\int_{t_0}^{t}e^{q(\tau-t)}F(\tau)\,d\tau.$$

Отсюда получаем

$$\delta\varphi(t)=j'(t)=F(t)-q\int_{t_0}^{t}e^{q(\tau-t)}F(\tau)\,d\tau \tag{20}$$

$$\delta m(t)=\frac{1}{\varphi(m)}\cdot\int_{t_0}^{t}e^{q(\tau-t)}\cdot F(\tau)\,dt. \tag{21}$$

6. Возмущенные решения при $t-t_0\ll A$.

Рассмотрим поведение возмущенных решений на интервале $t_0\leqslant t\leqslant t+r$, составляющем малую часть характерного размера A (для невозмущенной системы $m(t)=t-A$).

Будем предполагать, что за время A трудовые ресурсы увеличились незначительно, т. е. что величина $\frac{T(t)}{T(t-A)}=\frac{\varphi(t)}{\varphi(t-A)}$ порядка единицы. Кроме этого, мы будем предполагать, что величина $\frac{-\ln\beta}{\alpha}$ тоже порядка единицы (т. е., что и α и β не слишком близки к нулю — для $\beta=0{,}6$ и $\alpha=0{,}4$, $-\frac{\ln\beta}{\alpha}\approx0{,}8$). В этих предположениях (близких к реальности) величина q порядка $\frac{1}{A}$. При $t-t_0$, малом по сравнению с A, формулы предыдущего параграфа можно существенно упростить.

В этом случае

$$\int_{t_0}^{t} e^{q(\tau-t)} F(\tau)\, d\tau \approx \int_{t_0}^{t} F(\tau)\, d\tau$$

$$q\int_{t_0}^{t} e^{q(\tau-t)} F(\tau)\, d\tau \approx 0$$

Поэтому

$$\delta\varphi(\tau) \approx F(t) = \varphi(t)\left(\frac{1}{\alpha}\frac{\delta f(t)}{f(t)} + \frac{\delta\varkappa(t)}{\varkappa(t)}\right) \quad (22)$$

$$\delta m(t) \approx \int_{t_0}^{t} \frac{\varphi(\tau)}{\varphi(m)}\left(\frac{1}{\alpha}\frac{\delta f(\tau)}{f(\tau)} + \frac{\delta\varkappa(\tau)}{\varkappa(\tau)}\right) d\tau. \quad (23)$$

Формулу (22) удобнее переписать в следующем виде:

$$\frac{\delta\varphi}{\varphi} \approx \frac{1}{\alpha}\frac{\delta f}{f} + \frac{\delta\varkappa}{\varkappa}. \quad (24)$$

Формула (24) имеет простую экономическую интерпретацию. Вспомним, что $\Pi(t) = f(t)\varkappa^{\alpha}(t)\varphi^{-\alpha}(t)$ и $\delta\Pi(t) = \Pi(t)\cdot\left(\frac{\delta f}{f} + \alpha\frac{\delta\varkappa}{\varkappa} - \alpha\frac{\delta\varphi}{\varphi}\right)$. Формула (24) показывает, что $\frac{\delta f}{f} + \alpha\frac{\delta\varkappa}{\varkappa} - \alpha\frac{\delta\varphi}{\varphi} \approx 0$. Значит, для возмущенного решения функция $\Pi(t) + \delta\Pi(t)$ примерно совпадает со старой функцией $\Pi(t)$, т. е. дополнительные капиталовложения $\delta\varkappa(t)$ и дополнительный эффект от научно-технического прогресса $\delta f(t)$ при дифференциально оптимальном развитии уходят в основном не на повышение производительности труда $(\Pi + \delta\Pi \approx \Pi)$, а на подтягивание большего числа трудовых ресурсов $\delta\varphi(t)$ со старых фондов на современные.

Точнее, сформулируем правило поведения функций $\varphi(t)$ и $m(t)$ на возмущенной траектории: нужно закрывать столько старых фондов, чтобы высвободившиеся трудовые ресурсы компенсировали увеличение производительности труда на новых фондах (происшедшее за счет дополнительных капиталовложений и введения технических новшеств) и доводили производительность труда на новых фондах до прежнего уровня (т. е. до уровня производительности труда на современных фондах у невозмущенной системы).

В формулах это правило выражается в равенствах

$$\frac{\delta\varphi}{\varphi} \approx \frac{1}{\alpha}\frac{\delta f}{f} + \frac{\delta\varkappa}{\varkappa} \quad \text{и} \quad \delta m \approx \int_{t_0}^{t} \varphi(\tau)\left(\frac{1}{\alpha}\frac{\delta f(\tau)}{f(\tau)} + \frac{\delta\varkappa(\tau)}{\varkappa(\tau)}\right) d\tau.$$

Это правило будет выполняться тем точнее, чем меньше отношение времени, прошедшего с момента возмущения, к характерному периоду A. При большем времени все большая часть дополнительных ресурсов будет уходить на рост производительности труда, т. е. величина $\delta\Pi(t)$ все заметнее будет отличаться от нуля. Более сложные формулы (20), (21) будут справедливы на большем интервале. Этот интервал будет тем длиннее, чем меньше возмущения

$$\frac{\delta f(t)}{f(t)} \quad \text{и} \quad \frac{\delta\varkappa(t)}{\varkappa(t)}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Канторович Л. В., Вайнштейн А. Л.* Об исчислении нормы эффективности на основе однопродуктовой модели развития хозяйства. Экономика и математические методы, 1967, т. III, вып. 5.
2. *Канторович Л. В., Жиянов В. И.* Однопродуктовая динамическая модель экономики, учитывающая структуру фондов при наличии технического прогресса. ДАН СССР, 1973, т. 211, № 6.
3. *Канторович Л. В., Жиянов В. И.* Динамические модели научно-технического прогресса. Доклад на Технической конференции IFIP, Нью-Йорк, «Springer — Verlag», 1975.
4. *Канторович Л. В., Жиянов В. И., Хованский А. Г.* Анализ динамики экономических показателей на основе однопродуктовых динамических моделей. Статья настоящего сборника с. 5.

С. В. Дубовский

ПРОИЗВОДСТВЕННЫЙ ФУНКЦИОНАЛ С ЭНДОГЕННЫМ И УПРАВЛЯЕМЫМ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИМ ПРОГРЕССОМ

При моделировании развития социально-экономических систем одной из ключевых является проблема описания экономического механизма, в частности, проблема определения зависимости суммарного экономического выхода системы (например, валового национального продукта) от имеющихся суммарных производственных ресурсов, научно-технического прогресса и политики распределения этого суммарного экономического выхода по элементам системы. Данная проблема становится особенно актуальной при математическом моделировании долгосрочного развития крупномасштабных объектов, таких как мир в целом, его регионы, отдельные страны [1—4]. В данной работе предлагается и анализируется система гипотез, с помощью которых проблема может быть решена.

Для описания связи между выпуском элемента экономики и имеющимися в его распоряжении ресурсами обычно используются два подхода. Первый, иногда называемый технологическим или микроподходом [5], основан на детальном описании организации технологического процесса. Когда такой подход неудобен из-за громоздкости получающейся модели или невозможности создания ее информационного обеспечения, прибегают ко второму подходу, т. е. постулированию существования так называемой производственной функции [6]. В этом случае практический способ нахождения связи между выпуском элемента экономики и его производственными ресурсами состоит в задании аналитического вида искомой зависимости, включающей параметры, и в определении значений этих параметров с помощью имеющейся статистики. Самым распространенным примером такой зависимости является производственная функция Кобба-Дугласа, обычно представляемая в виде

$$Y = ae^{\nu t}K^{\alpha}L^{1-\alpha}, \tag{1}$$

где Y — выпуск элемента экономики; K — его производственные фонды; L — трудовые ресурсы; t — время; e — основание натуральных логарифмов; ν, α, a — параметры, подлежащие определению.